A lei de Gauss

Prof. Fábio de Oliveira Borges

Curso de Física II

Instituto de Física, Universidade Federal Fluminense

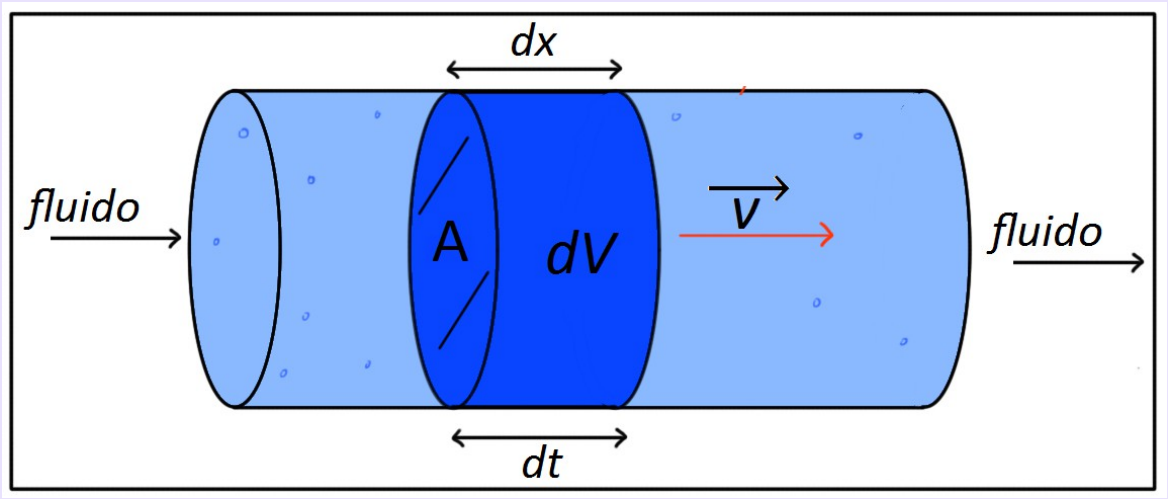
Niterói, Rio de Janeiro, Brasil

http://cursos.if.uff.br/fisica2-2015/

INSTITUTO DE FÍSICA
Universidade Federal Fluminense

Fluxo de um campo vetorial

Escoamento de um fluido em regime permanente



$$dV = Adx$$

$$\frac{dV}{dt} = A\frac{dx}{dt} = Av \quad \left[\frac{m^3}{s}\right]$$

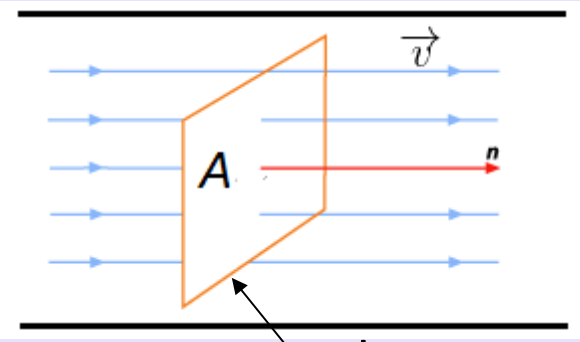
$$\frac{dV}{dt} = A\frac{dx}{dt} = Av \quad \left[m^3/s\right]$$

Escoamento uniforme

Vetores velocidades são paralelos e com a mesma intensidade, direção e sentido ao longo do fluido.

$$\Rightarrow vazão = A|\vec{v}|$$

Fluxo de um campo vetorial



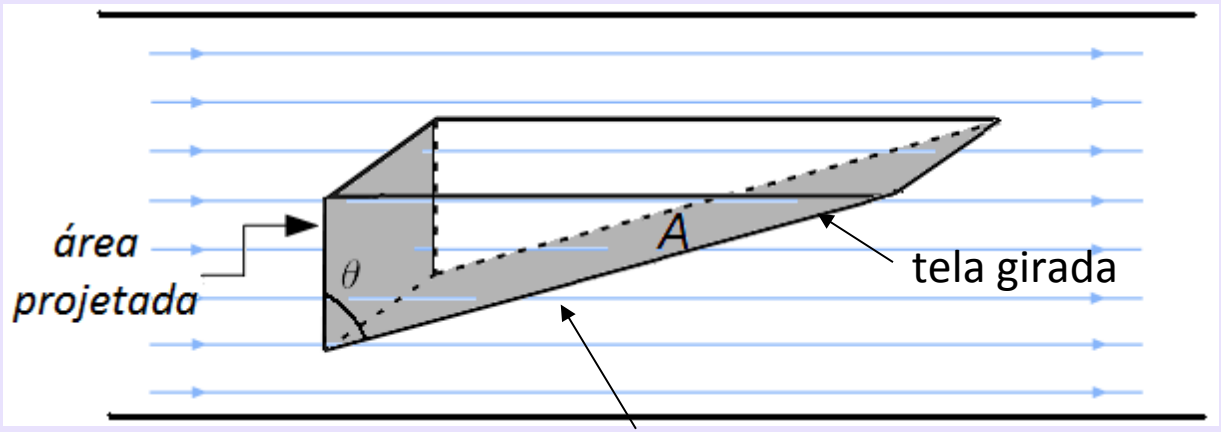
tela retangular perpendicular
à direção de escoamento

$$\Phi = A|\vec{v}| \quad \left[m^3/s\right]$$

Fluxo do campo vetorial
de velocidade

Fluxo vetorial $\rightarrow$ medida do número de linhas de campo que atravessam a área da tela imaginária.

Fluxo de um campo vetorial

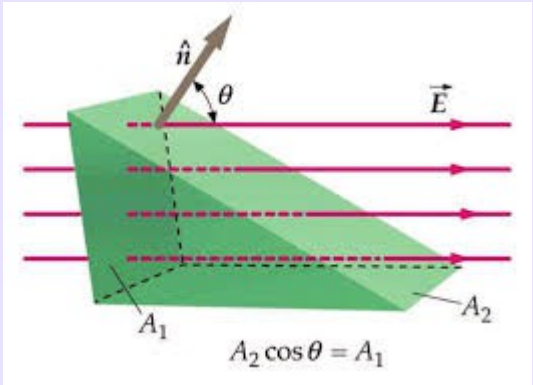


tela faz um ângulo com o vetor velocidade

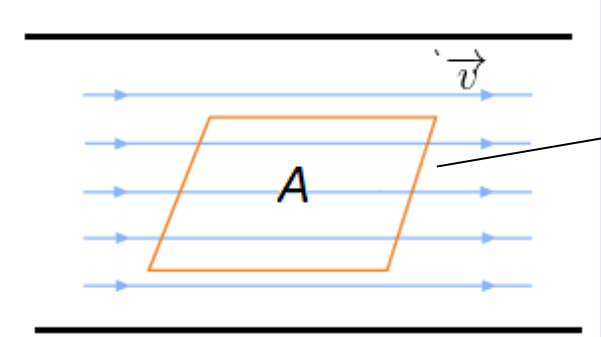
nº de linhas que atravessam a tela = nº de linhas que atravessam a área projetada $A\cos\theta$

$$\Rightarrow A \rightarrow A\cos\theta$$

$$\Rightarrow \Phi = |\vec{v}|A\cos\theta$$



Fluxo de um campo vetorial



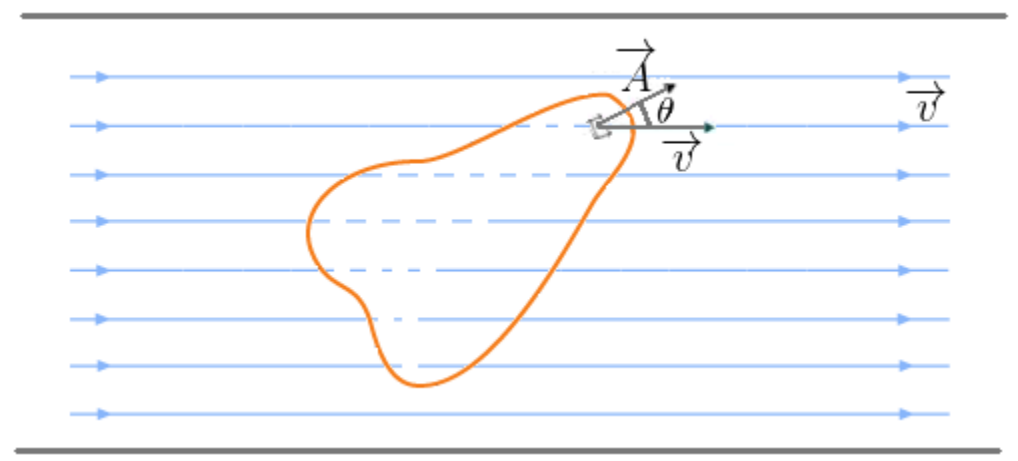
tela paralela ao deslocamento

$$A // \vec{v} \Rightarrow \theta = 90^o \rightarrow cos\theta = 0 \rightarrow \Phi = 0$$

não há linhas de campo atravessando a tela

Fluxo de um campo vetorial

- Definindo um vetor área, $\vec{A}$



$vetor\ \vec{A}$

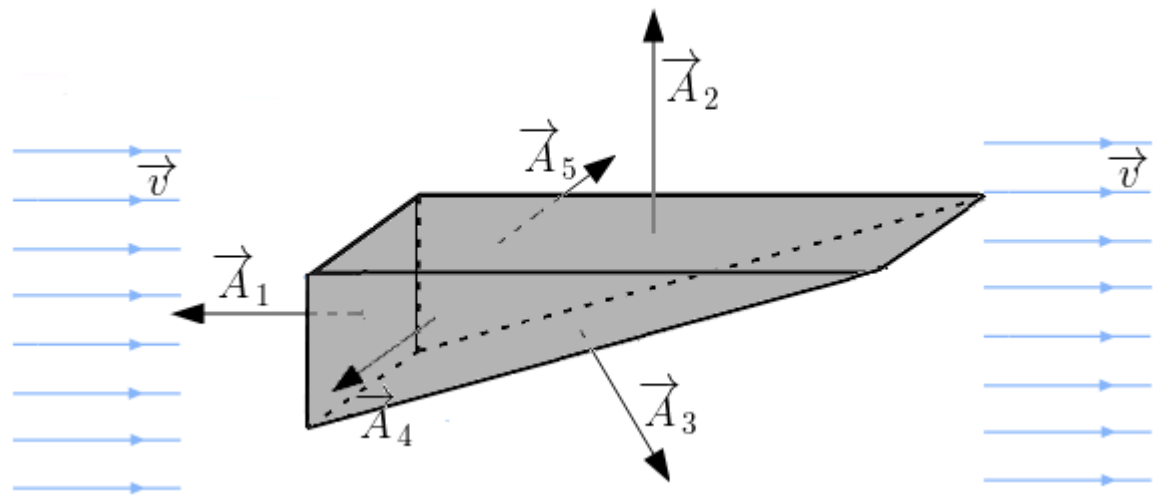
- módulo igual a área da superfície
- direção perpendicular a superfície
- sentido normal saindo da superfície

$$\Phi = vAcos\theta = \vec{v} \cdot \vec{A}$$

Convenção:

- fluxo saindo da superfície $\rightarrow$ positivo
- fluxo entrando na superfície $\rightarrow$ negativo

Fluxo para uma superfície fechada



$$\Phi = \sum \vec{v} \cdot \vec{A}$$

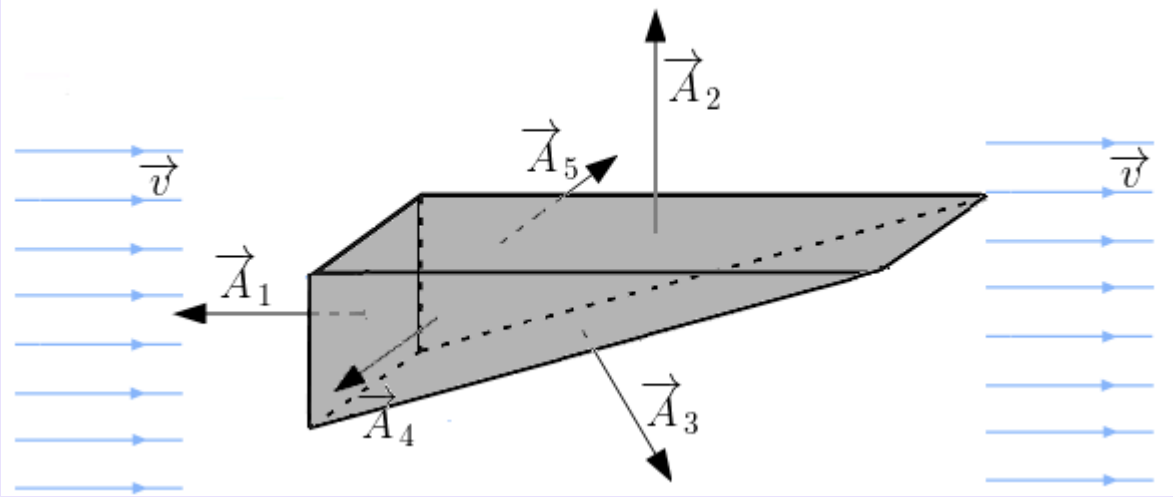
$$\Phi = \vec{v} \cdot \vec{A}_1 + \vec{v} \cdot \vec{A}_2 + \vec{v} \cdot \vec{A}_3 + \vec{v} \cdot \vec{A}_4 + \vec{v} \cdot \vec{A}_5$$

$$\vec{v} \cdot \vec{A} = |\vec{v}||\vec{A}|cos\theta$$

$$\vec{A}_2 \perp \vec{v} \Rightarrow \theta = 90^o \Rightarrow cos\theta = 0 \Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{A}_2 = 0$$

$$\vec{A}_4 \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{A}_4 = 0 \qquad \vec{A}_5 \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{A}_5 = 0$$

Fluxo para uma superfície fechada



$$\vec{A}_1 // \vec{v} \Rightarrow \theta = 180^o \Rightarrow cos\theta = -1 \Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{A}_1 = -vA_1$$

$$\vec{A}_3 \measuredangle \vec{v} \Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{A}_3 = v \underbrace{A_3 cos\theta}_{A_1 \leftarrow \text{área projetada}} = +vA_1$$

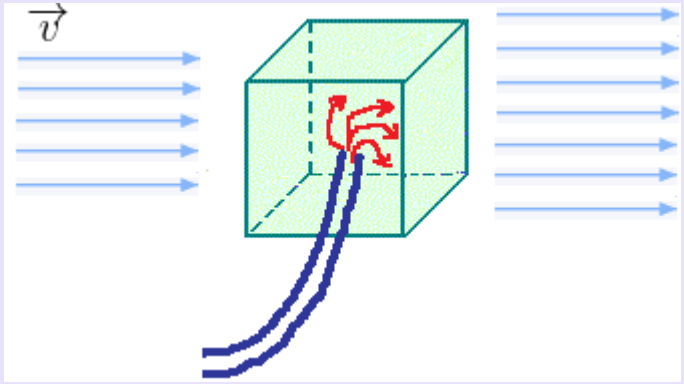
$$\Rightarrow \Phi = -vA_1 + 0 + 0 + 0 + vA_1$$

$$\Rightarrow \Phi = 0$$

O fluxo total sobre uma superfície fechada é nulo

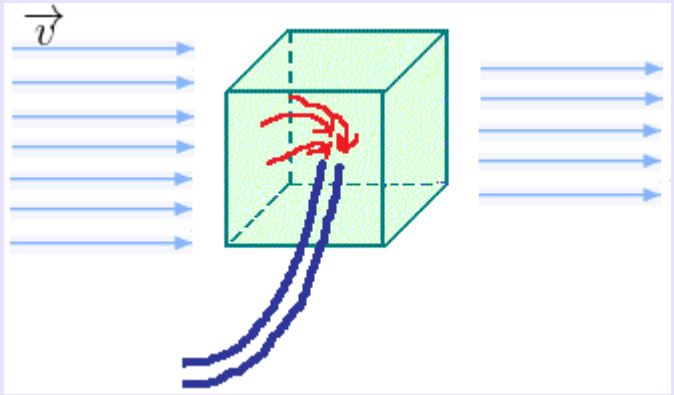
Fontes e sumidouros

Fontes e sumidouros são locais onde os fluidos são criados ou escoados



fonte

fluxo positivo



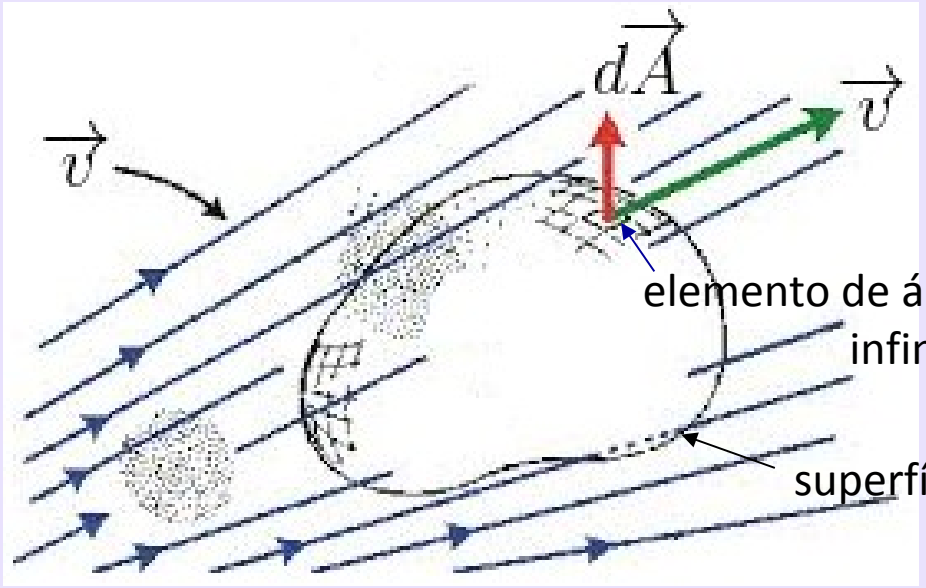
sumidouro

fluxo negativo

fonte + sumidouro

O fluxo pode ser positivo, negativo ou nulo, depende da capacidade de cada um.

Generalização



$$\Phi = \oint \vec{v}.d\vec{A}$$

Superfície fechada

Em uma superfície fechada o fluxo é:

(1) nulo se a superfície não engloba nenhuma fonte ou sumidouro.

$$\mapsto \Phi = 0$$

(2) positivo se a superfície contiver fontes em seu interior.

$$\mapsto \Phi = capacidades\ das\ fontes$$

(3) negativo se a superfície contiver sumidouros em seu interior.

$$\mapsto \Phi = capacidades\ dos\ sumidouros$$

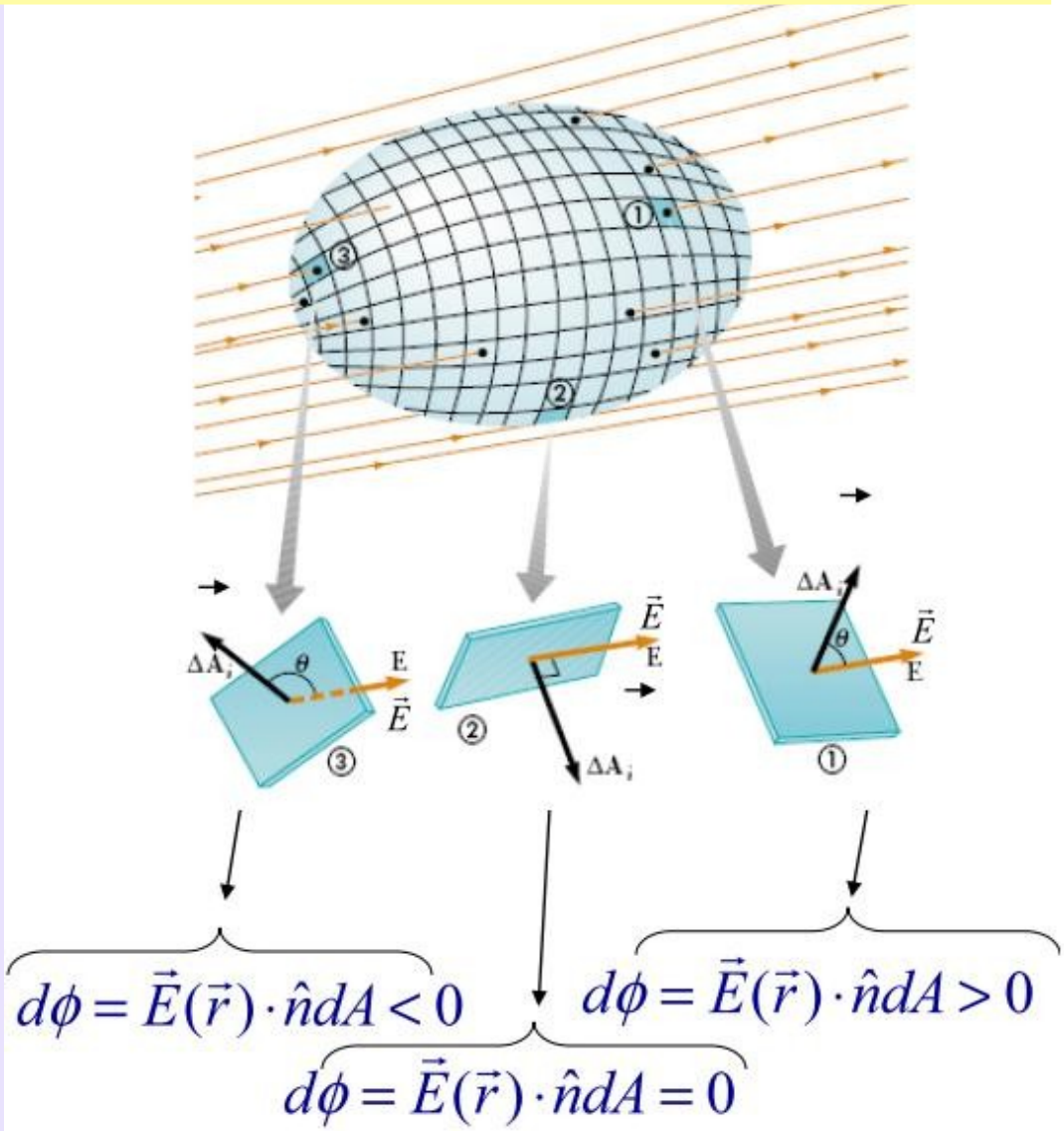
O fluxo do campo elétrico

campo de velocidades $\Rightarrow$ campo elétrico

$\vec{v}$ é substituido por $\vec{E}$

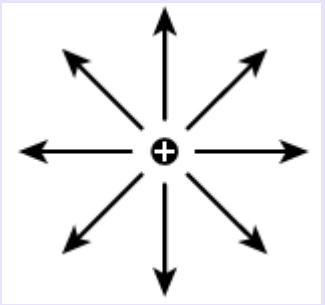
Por analogia:

$$\Phi_E = \oint \vec{E}.d\vec{A}$$

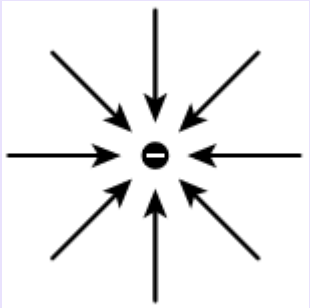


Identificação das fontes e sumidouros

Fonte de campo elétrico → carga positiva



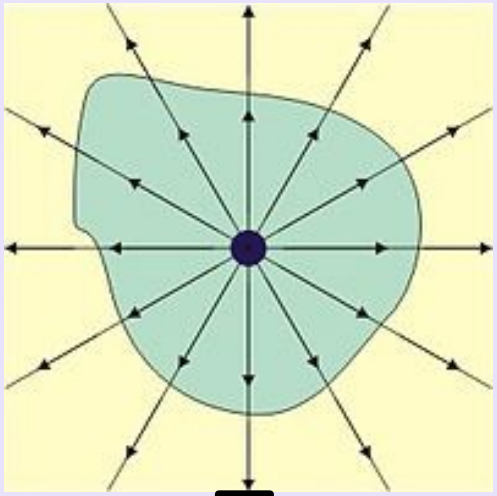
Sumidouro de campo elétrico → carga negativa



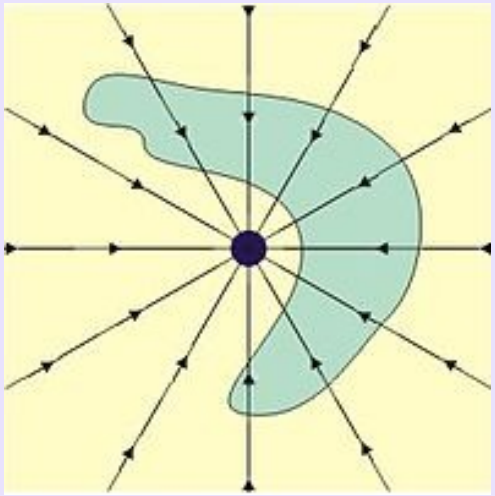
Fluxo de linhas de campo

Admita que cada unidade de carga q é representada por um número específico de linhas de campo

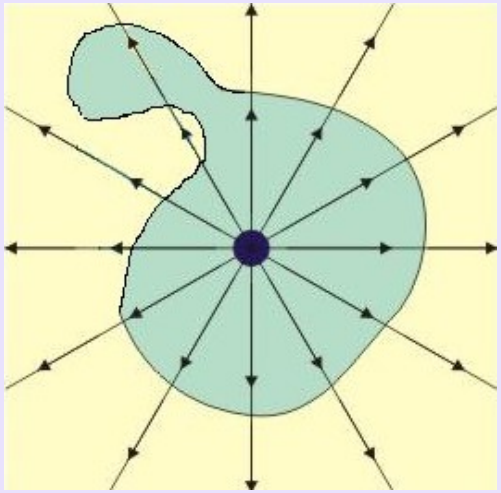
Ex:
- +q (12C) → 12 linhas apontando para fora
- -q (12C) → 12 linhas apontando para dentro



Φ =12 linhas saindo

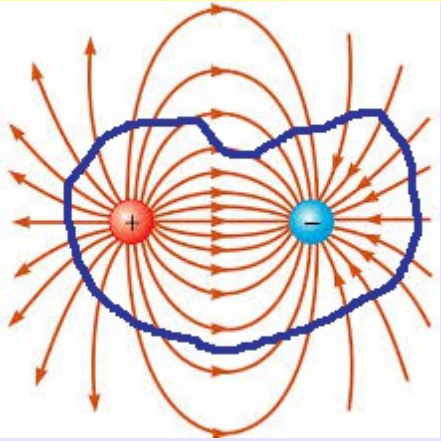


$\Phi = 8 - 8 = 0$

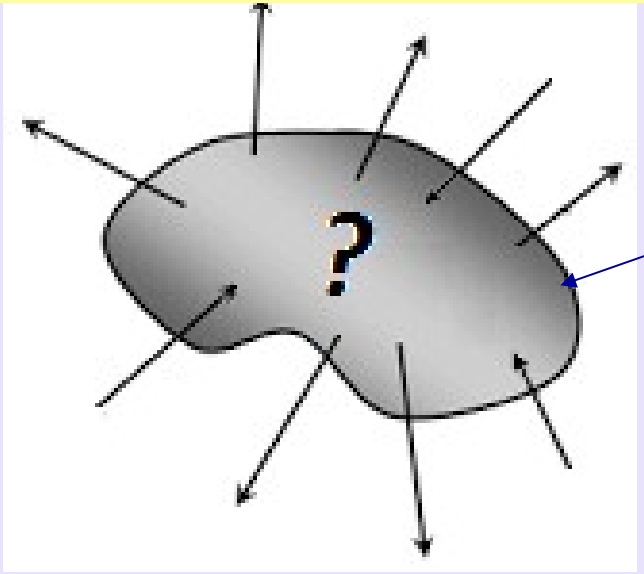


Φ =12 linhas saindo

Fluxo de linhas de campo



$\Phi = 24 - 24 = 0$



Qual é a carga interna a superfície?

Φ = 6 linhas saindo – 3 linhas entrando

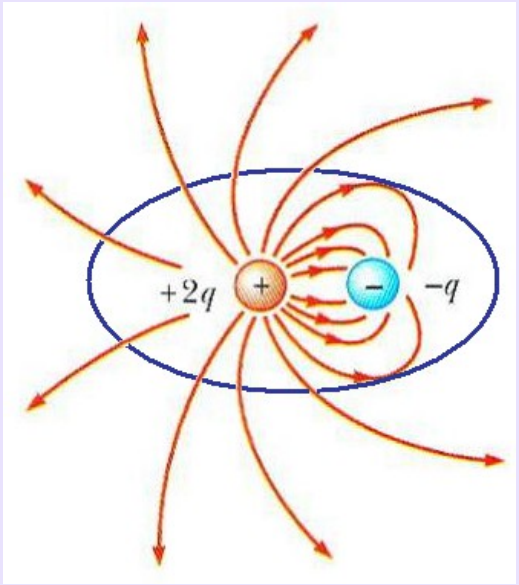
$\Rightarrow \Phi$ = 3 linhas saindo

podemos afirmar que há uma carga líquida de q = 3C dentro da superfície.

Concluímos que:

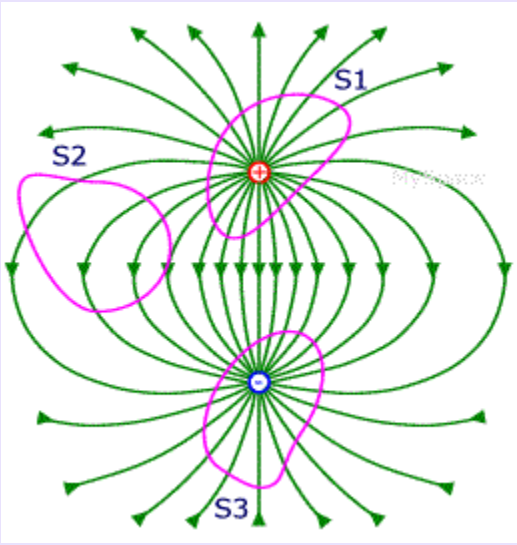
$$\Phi_E \propto q_{int}$$

Fluxo de linhas de campo



Assim:

$$\Phi_E = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}$$



- O fluxo líquido através de qualquer superfície fechada que envolve uma carga q é dado por q_{int}/ε_0.

A lei de Gauss

$$\oint \vec{E}.d\vec{A} = \Phi_E = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \oint \vec{E}.d\vec{A} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0} \rightarrow \text{Lei de Gauss}$$

A lei de Gauss afirma que o fluxo elétrico líquido, através de qualquer superfície gaussiana fechada, é igual à carga líquida no interior da superfície dividida por ε_0.

superfície gaussiana = qualquer superfície fechada

⇓

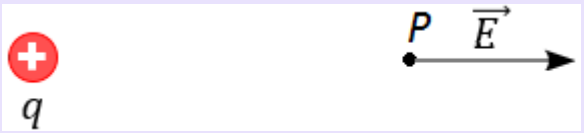
é escolhida pela simetria que a distribuição de carga apresenta

A lei de Gauss e a lei de Coulomb

Força coulombiana sobre q_0

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qq_0}{r^2}\hat{r}$$

Campo elétrico no ponto P



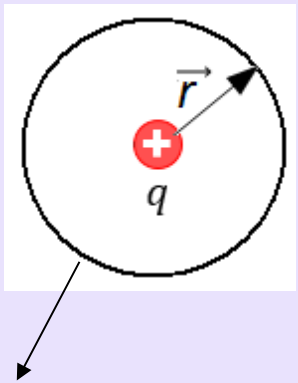
$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi r^2}\frac{q}{\epsilon_0}\hat{r}$$

$$Área\ \ de\ \ uma\ \ esfera \Rightarrow A = 4\pi r^2$$

A lei de Gauss e a lei de Coulomb

esfera de raio r



superfície gaussiana

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi r^2}\frac{q}{\epsilon_0}\hat{r}$$

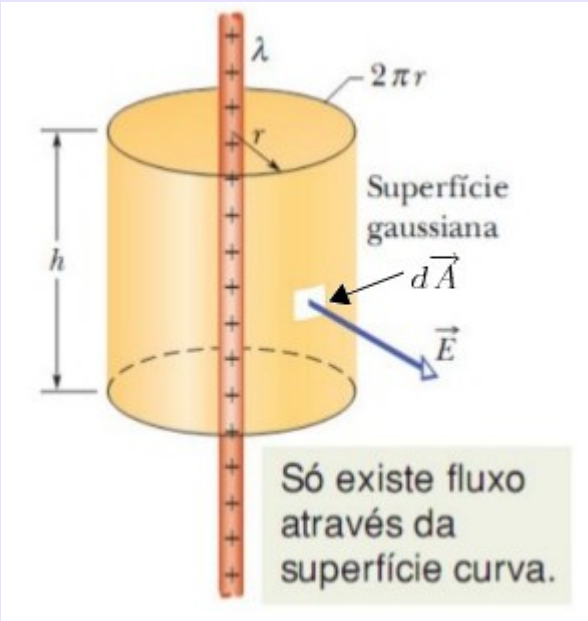
$$|E| = \frac{1}{|A|}\frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \underbrace{|E||A|}_{\Phi_E} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \Phi_E = \oint \vec{E}.d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

A ideia da lei de Gauss está na equação experimental da lei de Coulomb.

Aplicação da lei de Gauss: fio infinito



Superfície gaussiana

→ Uma superfície imaginária construída com o fim específico de se calcular o campo elétrico pela aplicação da lei de Gauss. Sobre está superfície o campo elétrico é constante.

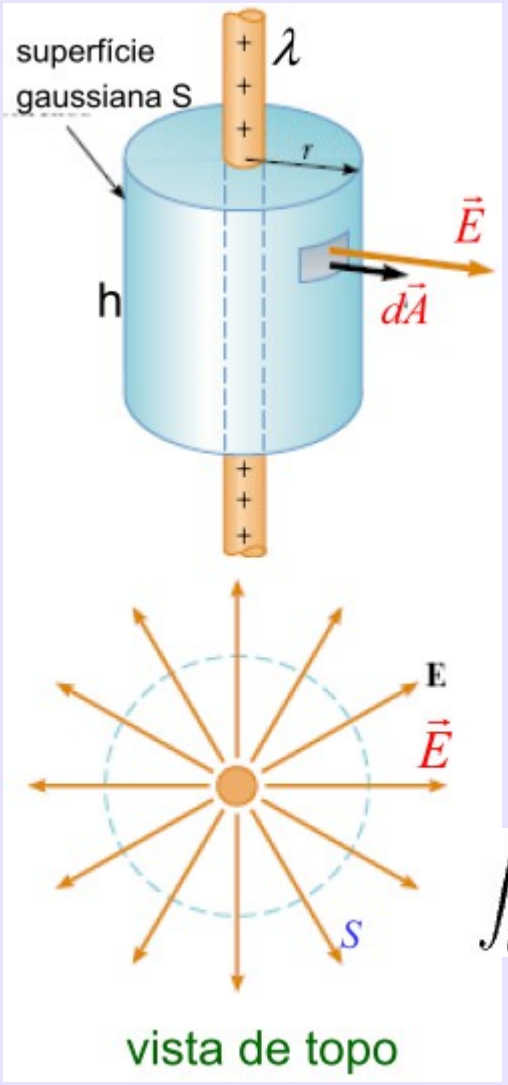
Campo elétrico

→ Apresenta apenas componente radial ⇒ é uniforme sobre uma superfície cilindrica.

Fluxo de $\vec{E}$ através das bases

$$\vec{E} \perp d\vec{A} \Rightarrow \Phi_E = \int_{\text{base}} \vec{E}.d\vec{A} = 0$$

Aplicação da lei de Gauss: fio infinito



Fluxo de $\vec{E}$ através da lateral

$$\Phi_E = \int_{Lat.} \vec{E}.d\vec{A} = \vec{E}.\int_{Lat.} d\vec{A} = EA = E(2\pi rh)$$

campo uniforme sobre o cilindro

$\vec{E}//d\vec{A} \Rightarrow cos\theta = 1$

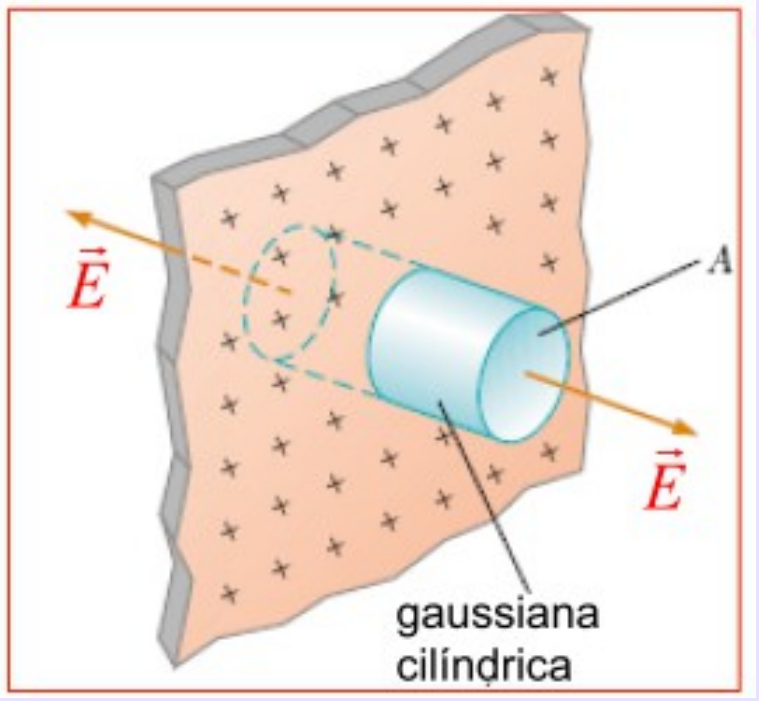
$$\oint \vec{E}.d\vec{A} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}, \qquad q_{int} = \lambda h$$

carga total dentro da superfície gaussiana

$$\int_{base} \vec{E}.d\vec{A} + \int_{base} \vec{E}.d\vec{A} + \int_{Lat.} \vec{E}.d\vec{A} = 0 + 0 + E(2\pi rh) = \frac{h\lambda}{\epsilon_0}$$

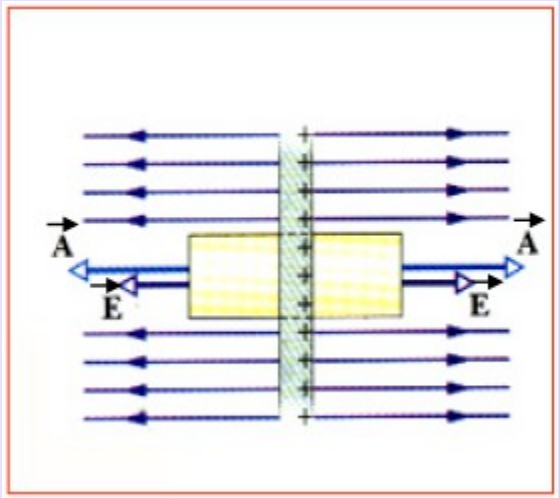
$$\Rightarrow E(2\pi rh) = \frac{\lambda h}{\epsilon_0} \qquad \Rightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

Aplicação da lei de Gauss: plano infinito



Campo elétrico

→ aponta para fora, perpendicular ao plano

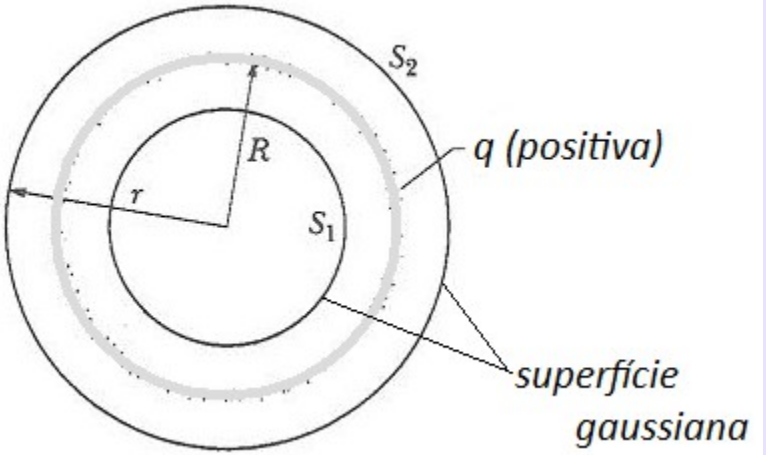


$$\oint \vec{E}.d\vec{A} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}$$

$$\oint \vec{E}.d\vec{A} = \int_{base} \vec{E}.d\vec{A} + \int_{base} \vec{E}.d\vec{A} + \int_{Lat.} \vec{E}.d\vec{A} = EA + EA + 0 = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}$$

$$(EA + EA) = \frac{\eta A}{\epsilon_0} \qquad \Rightarrow E = \frac{\eta}{2\epsilon_0}$$

Aplicação da lei de Gauss: casca esférica



Campo elétrico

→ apresenta somente componente radial, e é uniforme sobre a esfera.

$$\oint \vec{E}.d\vec{A} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}$$

superfície gaussiana S_1

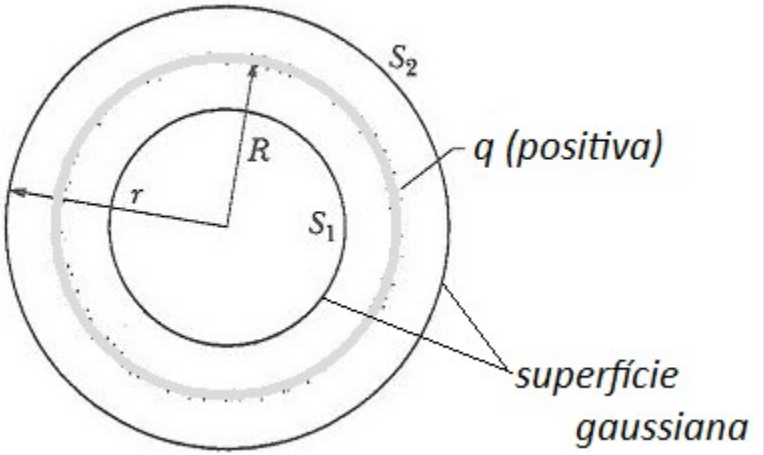
$$\oint \vec{E}.d\vec{A} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}; \qquad q_{int} = 0$$

$$\Rightarrow \oint \vec{E}.d\vec{A} = 0; \Rightarrow E = 0 \quad (r < R)$$

Teorema das cascas

1) "uma casca esférica uniforme carregada não exerce nenhuma força em uma partícula carregada localizada em seu interior"

Aplicação da lei de Gauss: casca esférica



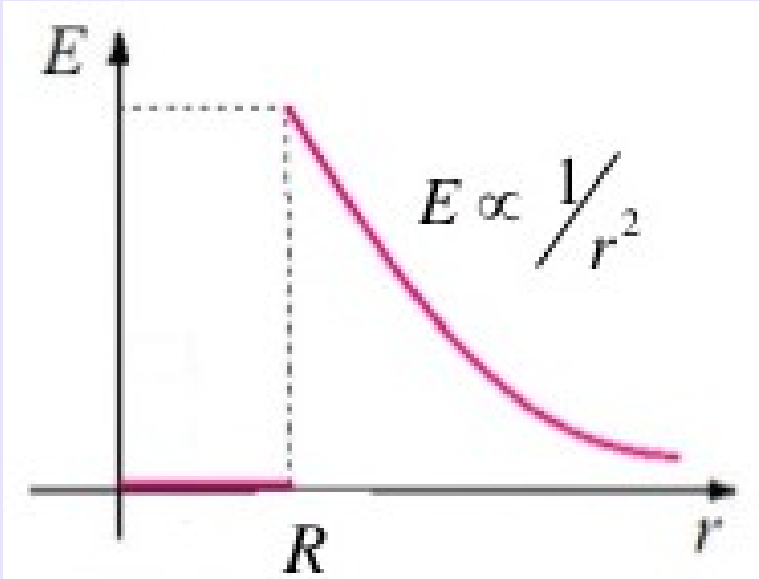
superfície gaussiana S_2

$$\oint \vec{E}.d\vec{A} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}; \qquad q_{int} = q$$

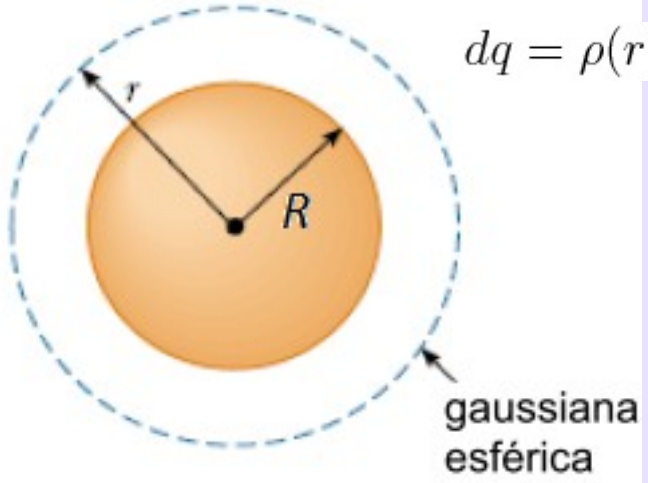
$$E(4\pi r^2) = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2} \qquad (r > R)$$

2) "uma casca esférica uniforme carregada comporta-se, para pontos externos, como se toda carga estivesse concentrada em seu centro."



Distribuição de carga com simetria esférica



$$dq = \rho(r)dV$$

$$\rho = C^{te} \quad ou \quad \rho = \rho(r)$$

Neste curso, ρ não vai depender das coordenadas angulares.

$$\oint \vec{E}.d\vec{A} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}$$

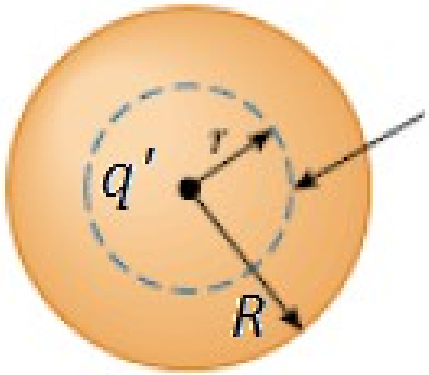
$$q_{int} = \int_V dq = \int_V \rho(r)dV$$

$$\Rightarrow \oint \vec{E}.d\vec{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \underbrace{\int_V \rho(r)dV}_{Q}$$

$$\Rightarrow E(4\pi r^2) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2} \qquad (r > R)$$

Distribuição de carga com simetria esférica



gaussiana esférica

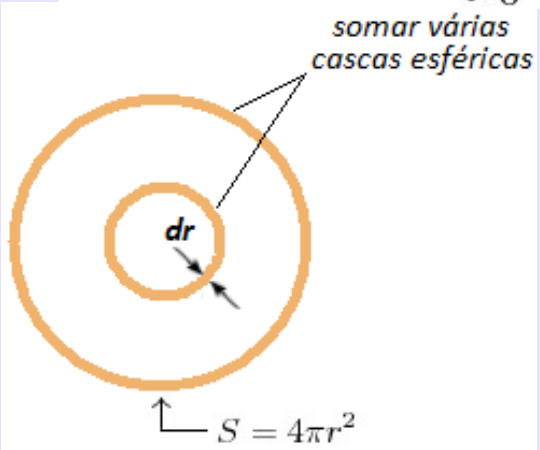
$$\oint \vec{E}.d\vec{A} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}$$

$$q_{int} = q' = \int dq' = \int_V \rho(r')dV \Rightarrow dV = ?$$

$$dV = \underset{da\ casca}{área} \times \underset{da\ casca}{espessura}$$

$$\Rightarrow dV = 4\pi r^2 \times dr$$

$$\Rightarrow q_{int} = q' = \int_0^r \rho(r')4\pi r'^2 dr' = 4\pi \int_0^r \rho(r')r'^2 dr' \qquad \rho(r') = ?$$



para uma distribuição homogênea $\Rightarrow \rho = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{4\pi R^3/3}$

$$\rho = \frac{3Q}{4\pi R^3} = C^{te}$$

Distribuição de carga com simetria esférica

$$\Rightarrow q' = 4\pi \int_0^r \frac{3Q}{4\pi R^3}\, r'^2\, dr'$$

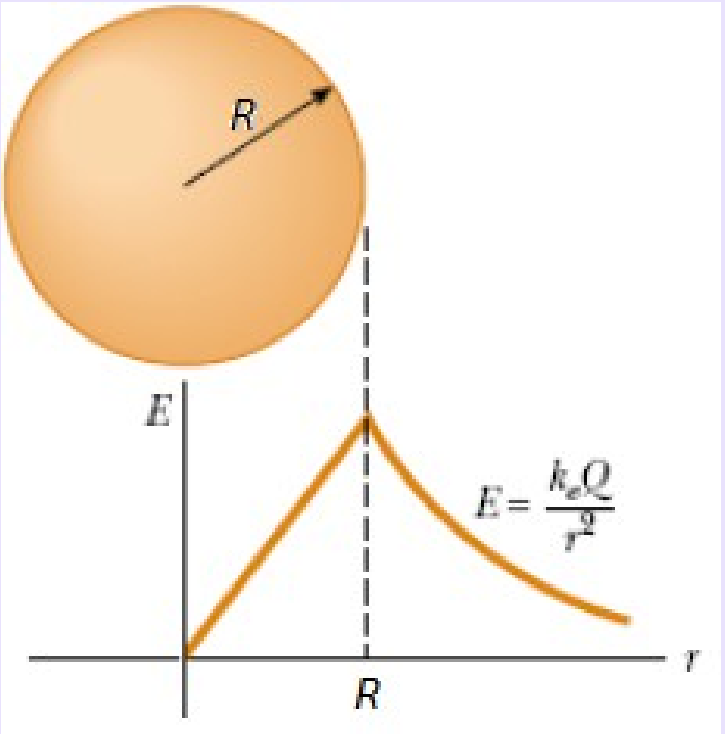
$$q' = \frac{3Q}{R^3} \int_0^r r'^2\, dr' = \frac{Qr^3}{R^3}$$

logo

$$\oint \vec{E}.d\vec{A} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}$$

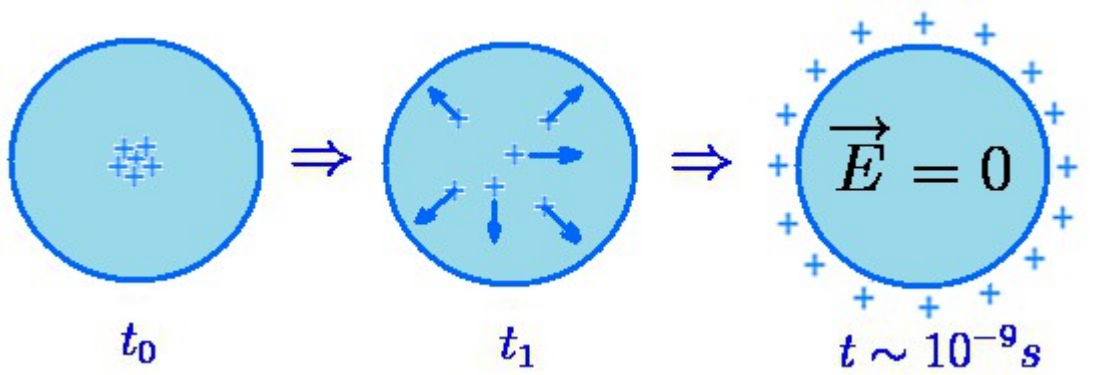
$$E(4\pi r^2) = \frac{1}{\epsilon_0}\,\frac{Qr^3}{R^3}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{Qr}{R^3} \qquad (r < R)$$

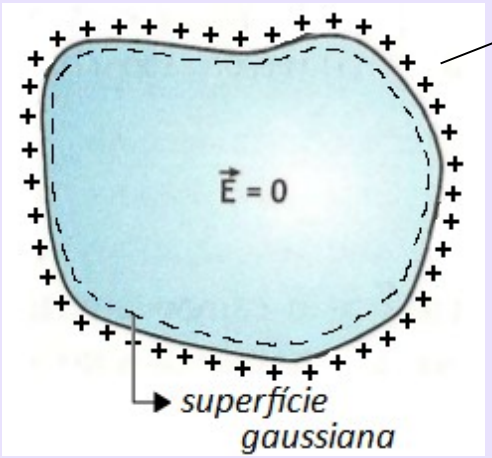


Condutores em equilíbrio eletrostático

1) O campo elétrico é nulo em qualquer ponto no interior de um condutor.



A carga se distribui de forma a anular o campo elétrico interior do condutor

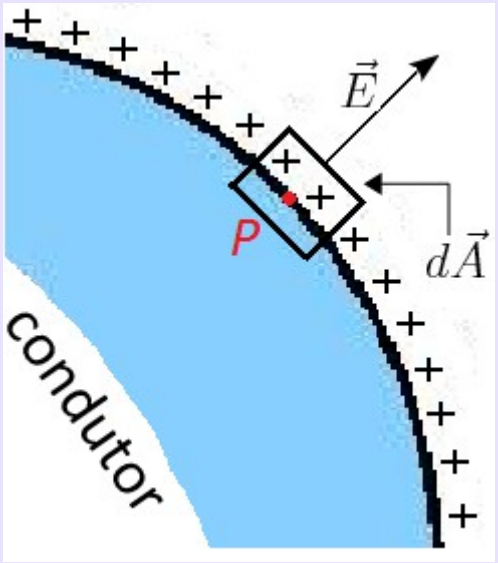


$$\oint \vec{E}.d\vec{A} = 0; \quad q_{int} = 0$$

Condutores em equilíbrio eletrostático

2) Qualquer excesso de carga, num condutor isolado, deve estar, necessária e inteiramente, na superfície do condutor.

- Qualquer carga desbalanceada em um condutor em equilíbrio se distribui em sua superfície (ver item (1))



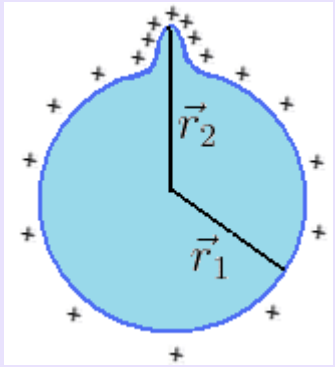
3) O campo elétrico na face externa da superfície de um condutor é perpendicular à superfície do mesmo e tem módulo igual a η/ε_0, onde η é a carga por unidade de área no ponto da superfície.

$$\oint \vec{E}.d\vec{A} = EA = \frac{q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{\eta A}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\eta}{\epsilon_0}$$

- O campo elétrico tem que ser normal a superfície de um condutor para que não haja correntes sobre a superfície.

Condutores em equilíbrio eletrostático

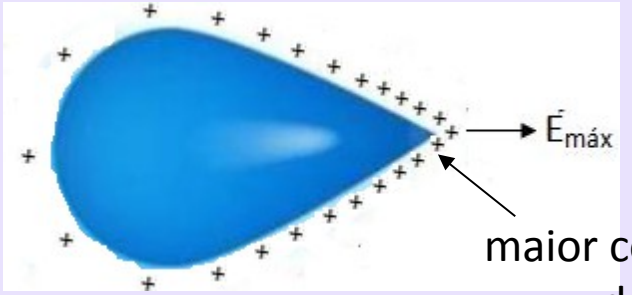
4) Num condutor com forma irregular, a carga tende a se acumular nos locais onde o raio de curvatura da superfície é pequeno, isto é, onde a superfície é pontuda. (efeito das pontas)



$$\vec{r}_1 < \vec{r}_2$$

$$E \propto \frac{1}{r^2}$$

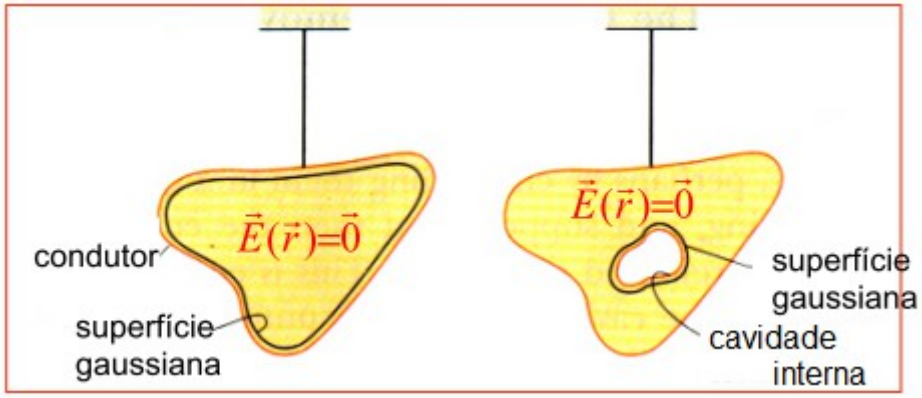
$$\Rightarrow \vec{E}_1 = \vec{E}_2$$



maior concentração de carga

Condutores em equilíbrio eletrostático

5) O campo elétrico no interior de um condutor em equilíbrio eletrostático é sempre nulo. Assim sendo, a lei de Gauss nos permite demonstrar que todo o excesso de carga no condutor deverá migrar para a sua superfície.

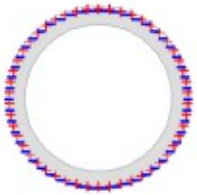


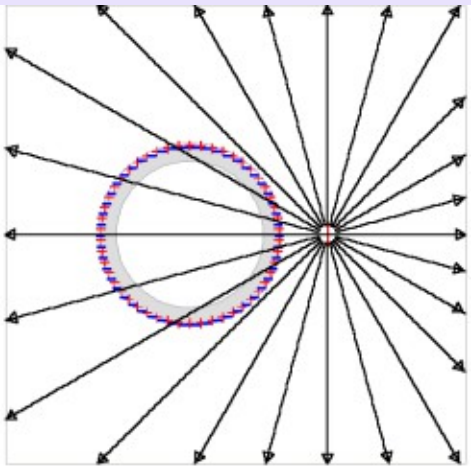
$$\vec{E} = 0 \; no \; interior \; do \; condutor$$

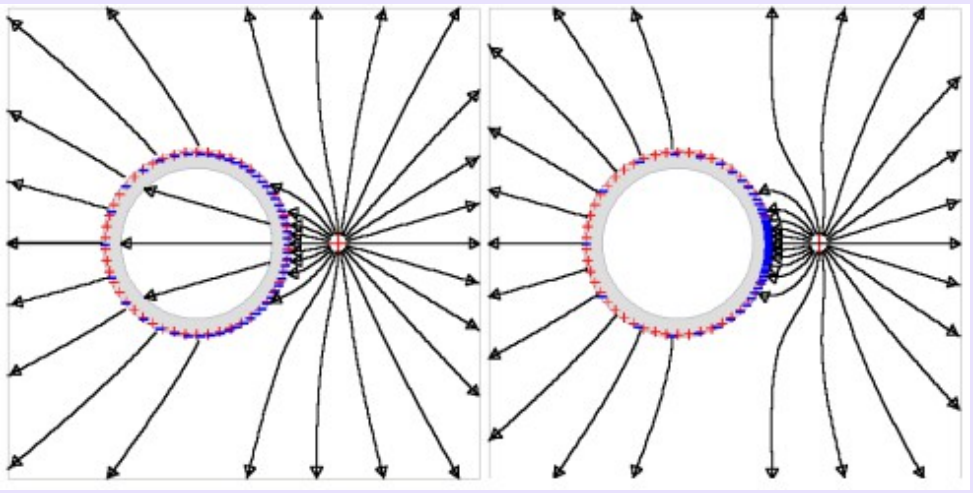
$$\Rightarrow \oint \vec{E}.d\vec{A} = 0 \Rightarrow q_{int} = 0$$

$\Rightarrow$ Não pode haver carga dentro de uma cavidade localizada no interior de um condutor isolado.

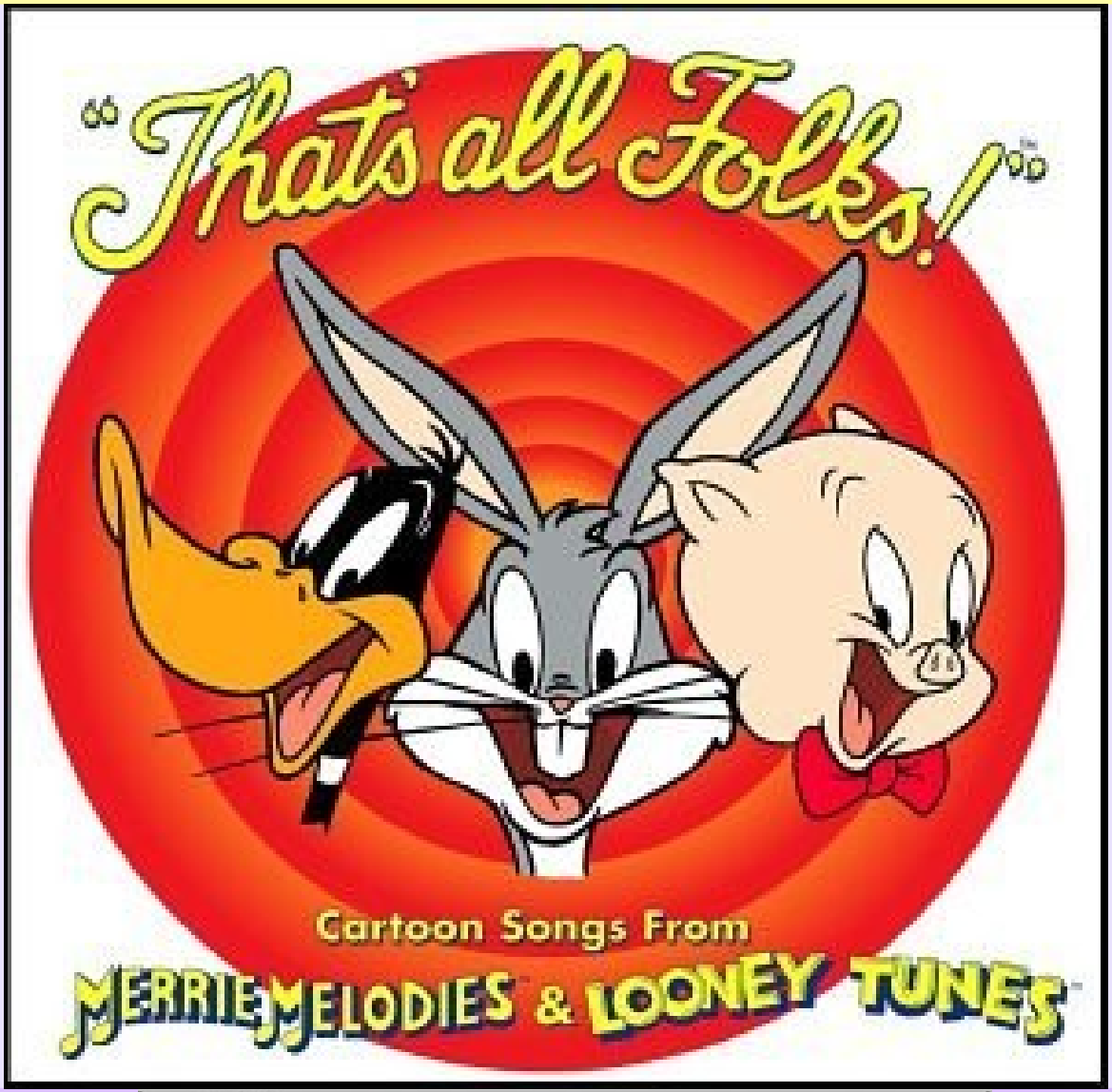
Gaiola de Faraday







FIM



INSTITUTO DE FÍSICA
Universidade Federal Fluminense